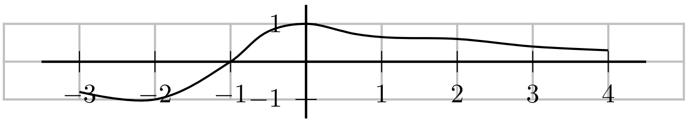
1. **Primitive d'une fonction continue sur un intervalle** :
   - *Reprise en main notion de dérivée* :
     La courbe ci-dessous représente la dérivée d'une fonction F sur $[-3;4]$. Donner le tableau de variation de F.



x	
$f(x)$	
F	

Les fonctions f sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$.

a) $\begin{cases} f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x + 4 \\ f'(x) = \cdots\cdots\cdots \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{(x^2+5)^8} \\ f'(x) = \cdots\cdots\cdots \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = \ln(x^2+4) \\ f'(x) = \cdots\cdots\cdots \end{cases}$

   - *Définition* : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, on dit que la fonction F, définie sur I est une primitive de f lorsque $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ F'(x) = f(x)}$

     Dire si F est une primitive de f sur I

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x} \\ \text{et } F(x) = \ln(x) + x - 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = (2x-1)^3 \\ \text{et } F(x) = (2x-1)^4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}} \\ \text{et } F(x) = \sqrt{2x+5} \end{cases}$

   - *Propriété 1* : Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.
     De Plus, Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur un intervalle I,
     Alors il existe k, constante réelle, telle que pour tout $x \in I$, $F_2(x) = F_1(x) + k$

     Preuve : Supposons l'existence d'une primitive F de f sur I, Alors pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
     Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(F(x)+\alpha)' = F'(x) + 0 = f(x)$ ALORS $F + \alpha$ est une primitive de f sur I
     Nous montrerons l'existence plus tard.

   - *Propriété 2* : Lorsque F et G sont des primitives de f et g sur un intervalle I,
     Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha F + G$ est une primitive de $\alpha f + g$ sur I.

     Preuve : ....
     ....
     ....

   - Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.

Lorsque $f(x) = \cdots$	ALORS $F(x) = \cdots$	Sur l'intervalle $\cdots$
$a \in \mathbb{R}$		
x		
x^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$		
$\dfrac{1}{x}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		
e^x		

f	F	
$u' \times u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	pour u strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	pour u strictement positive
$u'e^u$	e^u	

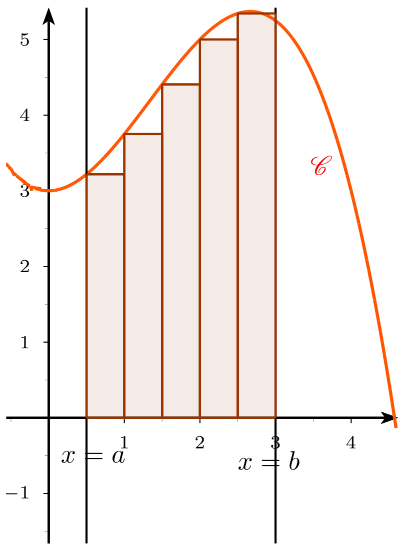
Donner une primitive F de f, préciser l'intervalle

a) $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ F(x) = \cdots\cdots\cdots \\ \text{Sur } \cdots\cdots\cdots \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \\ F(x) = \cdots\cdots\cdots \\ \text{Sur } \cdots\cdots\cdots \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = (3x-1)^4 \\ F(x) = \cdots\cdots\cdots \\ \text{Sur } \cdots\cdots\cdots \end{cases}$

2. **Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle** :

- *Présentation, Définition* :

On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous, on s'intéresse au calcul de l'aire comprise entre $\mathscr{C}$ les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.
On approche dans un premier temps cette aire par la somme des aires des rectangles de hauteur $f(x)$ de largeur Δx.



La somme des aires des rectangles est $f(a)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x + \cdots f(b - \Delta x)\Delta x$

On peut noter cette somme : $\sum f(x)\Delta x$

Plus Δx sera petit plus l'approximation de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ par cette somme sera précise.

On prend donc Δx, variations de x, infiniment petit et on note dx,
Alors la somme n'est plus dénombrable, la somme devient "continue".
Il nous faut alors une nouvelle notation :

$\int_a^b f(x)dx$, on prononce intégrale de a à b de $f(x)dx$.

Définition :

> Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, on appelle intégrale de f sur $[a; b]$, on note $\int_a^b f(x)dx$, l'aire algébrique comprise entre la courbe qui représente f et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ exprimée en unité d'aire.

On note aussi parfois $\int_a^b f$

- *Propriétés* :

1) *Linéarité* : pour toutes fonctions f et g continues, et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b (\alpha f + g) = \alpha \int_a^b f + \int_a^b g$

2) *Relation de Chasles* : pour toute fonction f continue, on a $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

3) *Conséquence* : Pour toute fonction f continue, $\int_a^b f = -\int_b^a f$

4) *Comparaison* : Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) > 0$ ALORS $\int_a^b f(x)dx > 0$

5) *Comparaison* : Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) > g(x)$ ALORS $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

- *Théorème* :

> Soit f continue sur $[a; b]$,
>
> ALORS pour tout $x \in [a; b]$, $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a; b]$

Preuve : Vérifions que la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(x)dx + F(a)$ a pour dérivée f.

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx}{h} = \dfrac{\int_x^{x+h} f(x)dx}{h}$ tend lorsque h est "petit" vers $\dfrac{hf(x)}{h} = f(x)$,

Ainsi F dérivable en tout $x \in [a; b]$ et $F'(x) = f(x)$, Alors F est une primitive de f sur $[a; b]$.

- *Corollaire* :
Toute fonction f continue sur $[a; b]$ admet une primitive F sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

3. **Valeur Moyenne d'une fonction continue sur un intervalle** :

- *Définition* :

> Soit f continue sur $[a;b]$ intervalle de $\mathbb{R}$, Alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est donnée par $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

- Interprétation graphique :

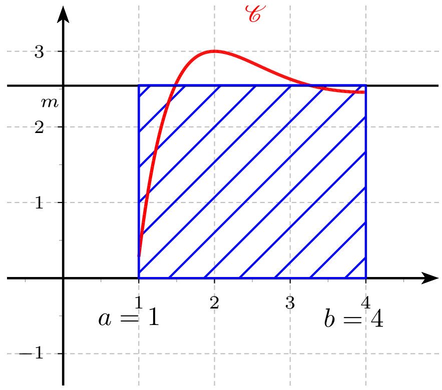
Soit f continue positive sur $[a;b]$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal,

la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre m tel que

$$m(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

c'est à dire tel que l'aire du rectangle soit égale à l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$.



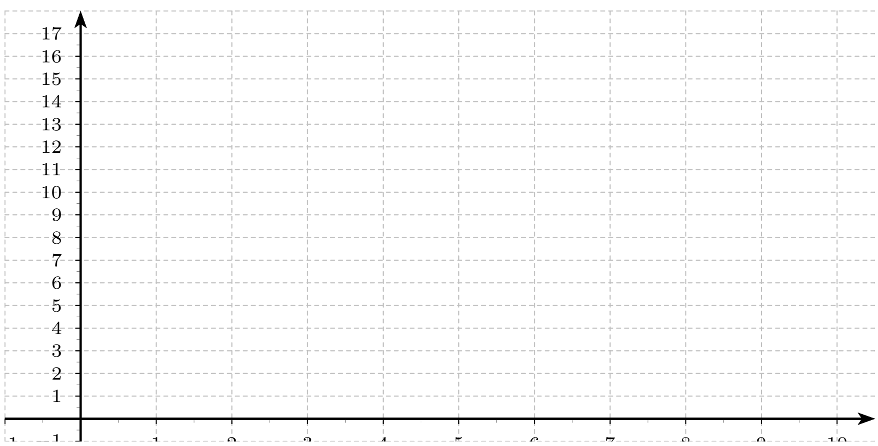
- *Applications* :

SVT On injecte dans le sang un médicament.
Soit t le temps en heures, écoulé depuis l'injection du produit. La concentration en grammes du médicament est donnée sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.
Soit F la fonction définie par $F(t) = -5e^{-t} - f(t)$ pour tout $t \geq 0$.

1) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
2) Calculer la concentration moyenne pendant la première heure à 0,01 près, puis la concentration moyenne pendant les deux premières heures.

SP Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $a = 1,5m.s^{-2}$. La vitesse du mobile au temps $t \geq 0$ en secondes, est $v(t)$ en $m.s^{-1}$ et sa position est donnée par $x(t)$ en mètres, avec $x(0) = 0$.

1) a) Sachant que la vitesse initiale du mobile est $2m.s^{-1}$, exprimer $v(t)$ en fonction de t.
   b) En déduire $x(t)$ en fonction de t.
2) Représenter graphiquement v en fonction de t sur $[0;10]$.
3) a) Calculer l'aire sous la courbe de v sur $[0;10]$.
   b) Calculer la valeur moyenne de v sur $[0;10]$. Interpréter ce résultat.

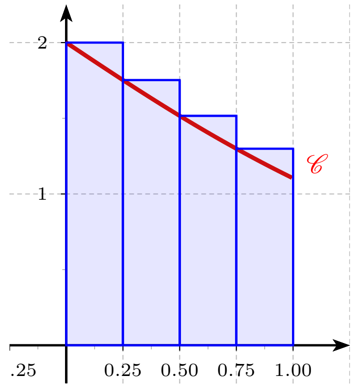


4. **Algorithme : Encadrement de l'intégrale d'une fonction continue, monotone, positive sur un intervalle, *Méthode des rectangles***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal.
On admet que f est continue, positive, décroissante sur $[0;1]$.
On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

On approche l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

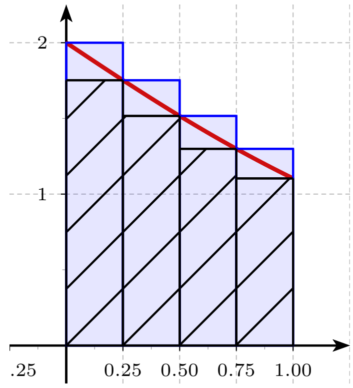
(a) Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0;1]$ en quatre intervalles de même largeur et on construit
- . Sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f(0)$,
- . Sur $\left[\frac{1}{4};\frac{2}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$,
- . Sur $\left[\frac{2}{4};\frac{3}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{2}{4}\right)$,
- . Sur $\left[\frac{3}{4};1\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$,



L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant l'aire des 4 rectangles.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

Variables	k nombre entier
	S nombre réel
Initialisation	S prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 3
	S prend la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin de Pour
Sortie	Afficher S

(b) Dans cette question, on construit
- . Sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$,
- . Sur $\left[\frac{1}{4};\frac{2}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{2}{4}\right)$,
- . Sur $\left[\frac{2}{4};\frac{3}{4}\right]$ un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$,
- . Sur $\left[\frac{3}{4};1\right]$ un rectangle de hauteur $f(1)$,



Compléter l'algorithme ci-contre pour obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant l'aire des 4 rectangles hachurés.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

Variables	k nombre entier
	S nombre réel
Initialisation	S prend la valeur $\cdots$
Traitement	Pour k allant de $\cdots$ à $\cdots$
	S prend la valeur $S + \frac{1}{4}f\left(\frac{\cdots}{4}\right)$
	Fin de Pour
Sortie	Afficher S

(c) La différence des résultats de ces deux algorithmes est la précision de l'approximation de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
Quelle est cette précision ?
Donner un encadrement de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

(d) Que peut-on proposer pour une meilleure approximation ?