Partie 1 : Primitive

<u>Exercice 1</u> : On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x$ et $F(x) = x^3 - x^2 + 5$.

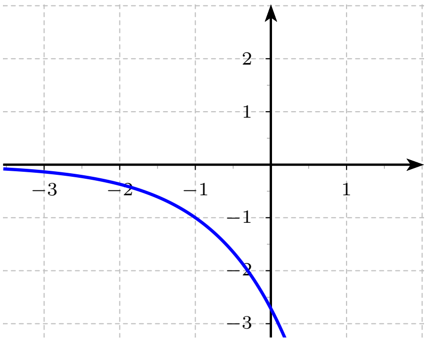
1. Vérifier que F est une primitive de f.
2. (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

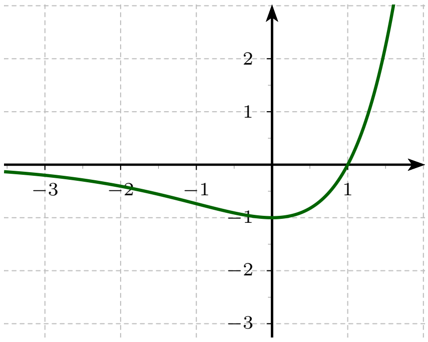
<u>Exercice 2</u> : Une seule des quatre réponses est exacte.

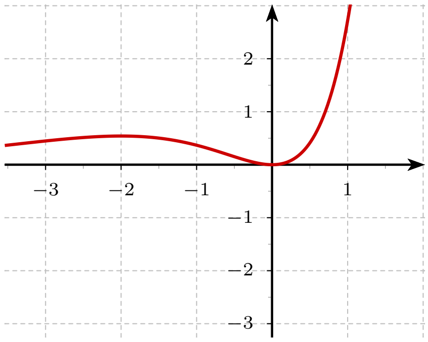
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x)$. Une primitive F de f est la fonction F définie par

a) $F(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $F(x) = x\ln(x)$ c) $F(x) = x\ln x - x$ d) $F(x) = e^x$

<u>Exercice 3</u> : On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^x$. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f. Laquelle ? Pourquoi ?







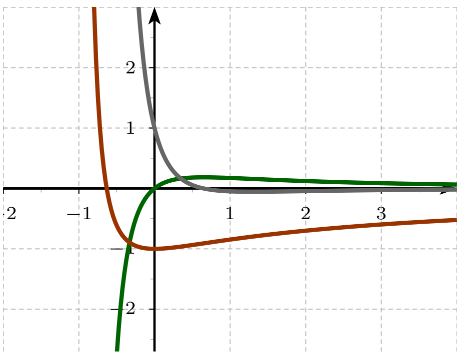
<u>Exercice 4</u> :

1. De quelle fonction g la fonction G est-elle une primitive sur $\mathbb{R}$?

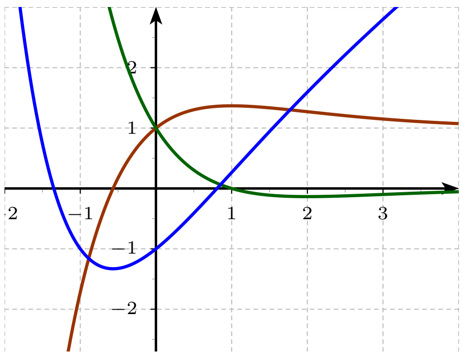
   a) $G(x) = 2x^3 - 4x + 5$ b) $G(x) = (x+1)e^{-x}$ c) $G(x) = \ln(x^2+4)$ d) $G(x) = x\ln x - x$
2. Déterminer dans chaque cas les primitives de g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer dans chaque cas la primitive de g qui prend la valeur 1 en 0.

<u>Exercice 5</u> : On a tracé dans les deux cas ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f sur $\mathbb{R}$, celle $\mathscr{C}_{f'}$ de sa dérivée f' et celle $\mathscr{C}_F$ de l'une de ces primitives F sur $\mathbb{R}$. Identifier ces trois courbes.

Premier cas :



Second cas :



<u>Exercice 6</u> :

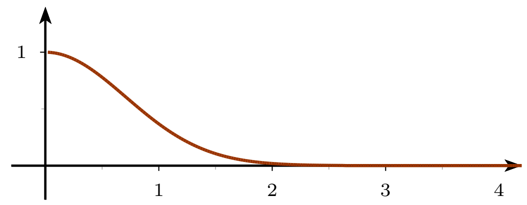
1. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$

   a) $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = e^x - 4x + 2$ c) $f(x) = e^{2x}$ d) $f(x) = xe^{x^2}$ e) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$
2. Déterminer les primitives F de f sur $]0;+\infty[$. En déduire la primitive de f telle que $F(1) = 0$

   a) $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ c) $f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^4}$

Partie 2 : Intégrale

Exercice 7 : Soit F la fonction définie sur F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x f(x)dx$, où f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x^2}$ représentée ci-dessous.



1. Que représente la fonction F pour la fonction f ?
2. Déterminer le sens de variation de F sur $[0;+\infty[$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 (x^2+3)dx$ b) $\int_1^2 (2t+4)dt$ c) $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ d) $\int_0^1 (-3t^2+6)dt$ e) $\int_1^2 \left(2x-\frac{3}{x+1}\right)dx$

Exercice 9 : Déterminer le signe de chacune de ces intégrales, sans la calculer

a) $\int_{-3}^1 x^2dx$ b) $\int_0^{10} -3\sqrt{x}dx$ c) $\int_{-2}^0 x^3dx$ d) $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln x dx$

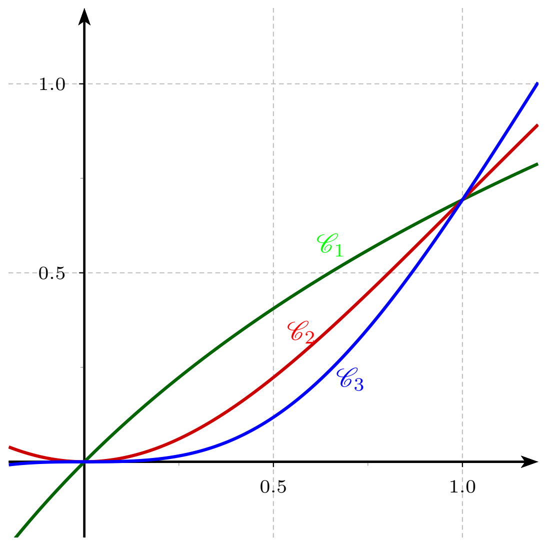
Exercice 10 :

1. (a) Justifier que sur $[0;1]$, $e^{-t^2}\geq e^{-t}$
   (b) Comparer les intégrales $\int_0^1 e^{-t}dt$ et $\int_0^1 e^{-t^2}dt$. En déduire une minoration de $\int_0^1 e^{-t^2}dt$.
2. Comparer de même $\int_1^2 e^{-t}dt$ et $\int_1^2 e^{-t^2}dt$. En déduire une inégalité portant sur $\int_1^2 e^{-t^2}dt$.

Exercice 11 : D'après BAC. On pose $I=\int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x}dx$

1. (a) Étudier la fonction $f: x\mapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur $[0;1]$.
   (b) Montrer que, pour tout x de $[0;1]$, $\frac{1}{e}\leq f(x)\leq \frac{1}{2}$
2. Soit $J=\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$ et $K=\int_0^1 x^2f(x)dx$
   (a) Déterminer des réels a et b tels que la fonction $G: x\mapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $g: x\mapsto (x+2)e^{-x}$ sur $[0;1]$. En déduire J.
   (b) De la question 1.(b), déduire que $\frac{1}{3e}\leq K\leq \frac{1}{6}$.
   (c) Montrer que $J+K=4I$.
   (d) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 12 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle f_n la fonction définie sur $]-1:+\infty[$ par $f_n(x)=\ln(1+x^n)$ et $I_n=\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$



On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n.

1. Émettre des conjectures sur la suite (I_n).
2. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0\leq I_n\leq \ln 2$
   (b) Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit $g(x)=\ln(x+1)-x$, pour tout $x\in[0;1]$.
   (a) Étudier le sens de variation de g sur $[0;1]$.
   (b) En déduire le signe de g sur $[0;1]$. Montrer alors que pour tout $n>0$, et pour tout $x\in[0;1]$, on a $\ln(1+x^n)\leq x^n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).