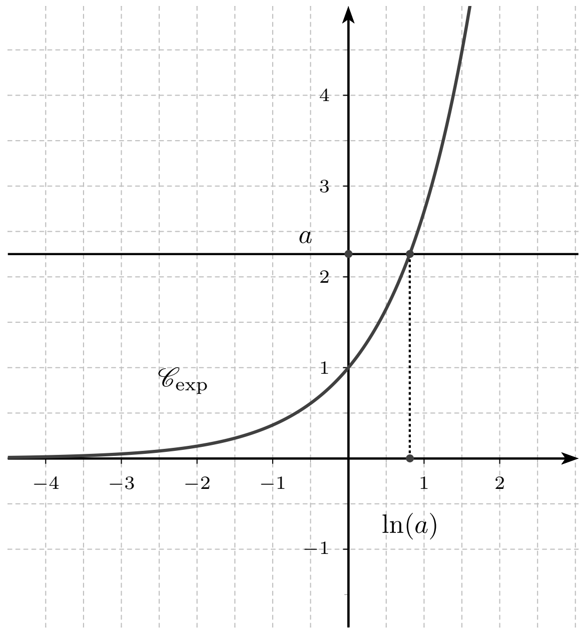
1. **Nombre logarithme népérien de a,** $\ln(a)$ **pour** $a > 0$:

- *Présentation graphique* :

  . La fonction exp est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $]0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

  Alors le Théorème des Valeurs intermédiaires assure que l'équation $e^x = a$ pour tout $a \in]0;+\infty[$
  admet une unique solution.

  On appelle logarithme népérien de a cette solution,
  on la note $\ln a$ ou bien $\ln(a)$, Attention a doit être > 0



  . $\forall a \in \mathbb{R}, e^a > 0$, Alors $\ln(e^a)$ est définit comme unique solution de $e^x = e^a$,
  donc $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \ln(e^a) = a}$

  . *En particulier*,

  $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, ALORS $\boxed{x = y > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y)}$

  $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, ALORS $\boxed{\ln(1) = 0}$

  et $e^x = e \Leftrightarrow x = 1$, ALORS $\boxed{\ln(e) = 1}$

- *Définition* : $\boxed{\text{Pour tout } a > 0,\ \ln(a) \text{ est la solution de l'équation } e^x = a}$ Autrement dit $\boxed{e^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)}$

  Conséquence $\boxed{e^{\ln(a)} = a}$

- *Propriétés des nombres logarithmes népériens* :

  . On rappelle que $\boxed{\text{Pour tout réels } u \text{ et } v,\ e^u \times e^v = e^{u+v}}$

  Posons alors $\begin{cases} a = e^u \Leftrightarrow u = \ln(a) \\ b = e^v \Leftrightarrow v = \ln(b) \end{cases}$, $e^u \times e^v = e^{u+v} \Leftrightarrow \ln(a \times b) = \ln(e^u \times e^v) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln(a) + \ln(b)$

  On retient $\boxed{\text{Pour tout réels } a > 0, b > 0,\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

  . On rappelle que $\boxed{\text{Pour tout réels } u \text{ et } v,\ (e^u)^v = e^{u\times v}}$

  Posons alors $a = e^u \Leftrightarrow \ln(a) = u$, $(e^u)^v = e^{u\times v} \Leftrightarrow \ln a^v = ln\,(e^u)^v = \ln(e^{u\times v}) = u \times v = (\ln(a)) \times v$

  On retient $\boxed{\text{Pour tout réels } a > 0,\ b \text{ quelconque, } \ln(a^b) = b \times \ln(a)}$, Pour tout $a > 0$, $\ln(\sqrt{a}) = \ln a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

  En particulier pour $b = -1$, $\boxed{\text{Pour tout réel } a > 0,\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)}$

  Conséquence $\boxed{\text{Pour tout réels } a > 0,\ b > 0,\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$

- *Applications* : a) Simplifier les expressions suivantes,

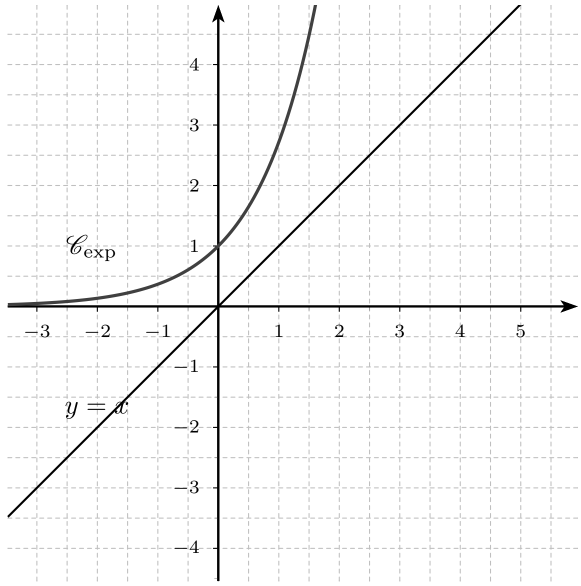
$\ln(3) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$	$\ln e^3 - \ln e$	$e^{-\ln 2}$	$\ln\sqrt{e^5}$	$e^{\ln 5 - \ln 3}$	$\ln e^3 - e^{\ln 3}$
....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....

  b) Résoudre $\ln(x^2) = \ln 2 + \ln(x+1)$, $e^{2x} - 3 = 0$ et $e^{2x} = e^{x+1}$.
  c) Résoudre $X^2 - 2X - 3 = 0$, en déduire les solutions de $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.

2. **Fonction logarithme népérien, $x \mapsto \ln(x)$ pour tout $x > 0$** :

- *Définition* : On définit sur $]0;+\infty[$, la fonction logarithme népérien à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à $x \mapsto \ln(x)$, où $\ln(x)$ est la solution de l'équation $e^y = x$ où x fixé, y inconnue.

- *Représentation graphique* : Les fonctions exp et ln sont réciproques, Alors les courbes qui représentent ces fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Construire la représentation graphique de ln.



Croissance comparée :

. Autant exponentielle croît vite vers $+\infty$ en $+\infty$, autant ln croît lentement en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ comme } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Tableau de Variations :

x	0		1		$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- *Dérivée* :

Par construction, la fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$. Notons f la fonction dérivée de ln.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$, dérivons membre à membre.

Dérivons la fonction composée $x \mapsto e^x \mapsto \ln(e^x)$, on obtient $x \mapsto e^x \times f(e^x)$,
la dérivée du membre de droite $x \mapsto x$ est la fonction constante $x \mapsto 1$,
Alors Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x f(e^x) = 1$, soit pour tout $X \in]0;+\infty[$, $f(X) = \dfrac{1}{X}$,

On retient $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[,\ (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}}$ plus généralement $\boxed{\forall x \text{ tel que } u(x) > 0 \text{ et } u \text{ dérivable en } x,\ (\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

- *Application* :
Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x$ et g définie sur $]-\dfrac{1}{2};+\infty[$ par $g(x) = \ln(2x+1)$.
Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$, dresser les tableaux de variations de f et g.

- *Limites Comparée en zéro* : On s'intéresse à $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

  . Quel est le nombre dérivé de ln en 1 ? $\ln'(1) = \cdots$

  . On rappelle que $\ln'(1) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$, Compléter et retenir $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \cdots}$

3. **Logarithme Décimal, *Log*** : La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $Log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ alors $Log(10) = 1$.

Logarithme décimale, possède les propriétés de ln mais en base 10. Ainsi $Log 10^x = x$ comme $\ln e^x = x$ pour tout x réel.

En particulier $Log10^2 = 2$, $Log10^3 = 3 \cdots$ et $Log10^{-1} = -1$, $Log10^{-2} = -2 \cdots$
Comme $\ln e^2 = 2$, $\ln e^3 = 3 \cdots$ et $\ln e^{-1} = -1$, $\ln e^{-2} = -2 \cdots$

Applications : Le retour des exercices de début d'année.