Partie 1 : À propos du nombre $\ln a$ et ses propriétés.

Exercice 1 :

1. Déterminer $\ln e^2$; $\ln e^{-3}$; $e^{\ln 6}$; $e^{\ln 2+\ln 3}$
2. Justifier que $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$
3. Démontrer que $\ln 5 - \ln 7 = \ln \dfrac{5}{7}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\ln x = 4 \quad ; \quad \ln x = -2 \quad ; \quad 3\ln x = 2 \quad ; \quad \ln x + \ln 5 - \pi = 0$$

Exercice 3 : Écrire plus simplement les expressions

$$\ln 14 - \ln 7 \quad ; \quad \ln \frac{5}{2} + \ln \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{\ln 100}{\ln 10} \quad ; \quad \ln 8 - \ln 12 + \ln 15 \quad ; \quad \ln 10^4 - \ln 10^{-2} \quad ; \quad \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

Exercice 4 : Montrer que pour tout réel x, $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations,

$$\ln x + \ln(x-1) = 6 \quad ; \quad \ln(x^2 + x) = 1 \quad ; \quad \ln x + \ln(x+1) = 1$$

$$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3 \quad ; \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1 \quad ; \quad \ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$$

Partie 2 : À propos de la fonction $\ln$ et ses propriétés.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations

$$\ln x < 1 \quad ; \quad 2\ln x - 1 \geq 0 \quad ; \quad \ln(2x-1) + 1 \leq 0$$

$$\ln x > \ln(2x-1) \quad ; \quad \ln(1 + e^x) > 0 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) \geq 1$$

Exercice 7 : Déterminer les limites

$$\lim_{x\to 0^+} x - \ln x \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - 1 + \ln x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \left(1 + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x - \ln x \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Exercice 8 : Pour chacunes des fonctions, indiquer sur quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$$f(x) = \ln(3x-1) \quad ; \quad g(x) = 2\ln x \quad ; \quad h(x) = \ln(x^2)$$

$$f_1(x) = 2x + 1 + \ln x \quad ; \quad g_1(x) = \ln(1 + x^2) \quad ; \quad h_1(x) = \ln(2x - x^2)$$

$$f_2(x) = x\ln x - x \quad ; \quad g_2(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad ; \quad h_2(x) = \ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$$

$$f_3(x) = \ln(e^x + 1) \quad ; \quad g_3(x) = x^2 + (\ln x)^2 \quad ; \quad h_3(x) = e^x \ln x$$

Exercice 9 : Faire l'étude des variations et représenter graphiquement, la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

Exercice 10 : On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

1. Montrer que g est définie pour tout x de $]-2;2[$, et déterminer les limites de g en -2 et 2.
2. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g.
3. Tracer $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.
4. Justifier que pour tout x de $]-2;2[$, $g(-x) = -g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_g$?

Exercice 11 : On considère la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+e^x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de h. Étudier les variations de h. Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentant h.
2. Tracer sur le même graphique la droite d d'équation $y = x$.
3. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) - x = \ln(1+e^{-x})$.
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) - x = 0$. Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 12 : On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

1. Soit g la fonction définie sur $[1+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$
   Montrer que g est positive sur $[1+\infty[$.
2. (a) Montrer que pour tout x de $[1+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   (b) En déduire le sens de variations de f sur $[1+\infty[$
   (c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d d'équation $y = x$
3. Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et d.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, la distance M_kN_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln k}{k}$. Justifier que cette distance tend vers 0, lorsque k tend vers $+\infty$
   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}