Partie 1 : À propos du nombre $\ln a$ et ses propriétés.

Exercice 1 :

1. Déterminer $\ln e^2$; $\ln e^{-3}$; $e^{\ln 6}$; $e^{\ln 2+\ln 3}$
   $\ln e^2 = 2\ln e = 2\times 1 = 2$; $\ln e^{-3} = -3\ln e = -3\times 1 = -3$; $e^{\ln 6} = 6$; $e^{\ln 2+\ln 3} = e^{\ln(2\times 3)} = e^{\ln 6} = 6$
2. Justifier que $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$, $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3$
3. Démontrer que $\ln 5 - \ln 7 = \ln\dfrac{5}{7}$, $\ln 5 - \ln 7 = \ln 5 + \ln 7^{-1} = \ln(5\times 7^{-1}) = \ln\dfrac{5}{7}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$\ln x = 4$; $\ln x = -2$; $3\ln x = 2$; $\ln x + \ln 5 - \pi = 0$

$\ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^4 \Leftrightarrow x = e^4$

$\ln x = -2 \Leftrightarrow \ln x = -2\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

$3\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x^3 = 2\ln e \Leftrightarrow \ln x^3 = \ln e^2 \Leftrightarrow x^3 = e^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^2}$

$\ln x + \ln 5 - \pi = 0 \Leftrightarrow \ln(5x) = \pi\ln e \Leftrightarrow \ln(5x) = \ln e^\pi \Leftrightarrow 5x = e^\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{e^\pi}{5}$

Exercice 3 : Écrire plus simplement les expressions

$\ln 14 - \ln 7 = \ln\left(\dfrac{14}{7}\right) = \ln 2$

$\ln\dfrac{5}{2} + \ln\dfrac{2}{5} = \ln\left(\dfrac{5}{2}\times\dfrac{2}{5}\right) = \ln 1 = 0$

$\dfrac{\ln 100}{\ln 10} = \dfrac{\ln 10^2}{\ln 10} = \dfrac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$

$\ln 8 - \ln 12 + \ln 15 = \ln\left(\dfrac{8\times 15}{12}\right) = \ln(10)$

$\ln 10^4 - \ln 10^{-2} = \ln\left(\dfrac{10^4}{10^{-2}}\right) = \ln\left(10^6\right) = 6\ln 10$

$\ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \ln\left(3+2\sqrt{2}\right) = \ln\left((3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\right) = \ln(9-4\times 2) = \ln(1) = 0$

Exercice 4 : Montrer que pour tout réel x, $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$

Pour tout réel x,
$$\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) = x$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) = x$$
$$\Leftrightarrow \ln\left[e^x\frac{e^{-x+1}}{1+e^{-x}}\right] = x$$
$$\Leftrightarrow \ln e^x + \ln 1 = x$$
$$\Leftrightarrow x = x$$
Toujours vraie !

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations,

$\ln x + \ln(x-1) = 6$
$\Leftrightarrow \ln x(x-1) = \ln e^6$
$\Leftrightarrow x^2 - x = e^6$
$\Leftrightarrow x^2 - x - e^6 = 0$
Second degré $\Delta = 1 + 4e^6 > 0$
$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4e^6}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4e^6}}{2}$

$\ln(x^2+x) = 1$
$\Leftrightarrow \ln(x^2+x) = \ln e$
$\Leftrightarrow x^2 + x = e$
$\Leftrightarrow x^2 + x - e = 0$
Second degré $\Delta = 1 + 4e > 0$
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}$

$\ln x + \ln(x+1) = 1$
$\Leftrightarrow \ln(x^2+x) = 1$
Voir cas précédent

$\ln x + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3$
$\Leftrightarrow x(4-x) = \ln 3(2x-1)$
$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 6x - 3$
$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$
Second degré $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$
$x_1 = \dfrac{2-4}{-2} = 1$, $x_2 = \dfrac{2+4}{-2} = -3$

$\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 1$
$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln e$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = e$
$\Leftrightarrow x + 1 = ex - e$
Degré Un
$x = \dfrac{-1-e}{1-e} = -\dfrac{1+e}{1-e}$

$\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$
$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{1}{e}$
$\Leftrightarrow ex + e = x - 1$
Degré Un
$x = \dfrac{-1-e}{e-1} = \dfrac{1+e}{1-e}$

Partie 2 : À propos de la fonction $\ln$ et ses propriétés.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$\ln x < 1$;
$\Leftrightarrow \ln x < \ln e$
$\Leftrightarrow 0 < x < e$

$2\ln x - 1 \geq 0$;
$\Leftrightarrow \ln x^2 \geq \ln e$
$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

$\ln(2x-1)+1 \leq 0$
$\Leftrightarrow \ln(2x-1) \leq \ln e$
$\Leftrightarrow 0 < 2x-1 \leq e \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \leq \dfrac{e+1}{2}$

$\ln x > \ln(2x-1)$;
$\Leftrightarrow x > 2x-1 > 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 1$

$\ln(1+e^x) > 0$;
$\Leftrightarrow 1+e^x > 0$
$\mathscr{S} = \mathbb{R}$

$\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right) \geq 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{1+e^x}{1-e^x} \geq e$ et $x \neq 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1+e^x-e(1-e^x)}{1-e^x} \geq 0$ et $x \neq 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{1-e+e^x(1+e)}{1-e^x} \geq 0$ et $x \neq 0$
tableau de signes

x	$-\infty$		$\ln\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right)$		0		$+\infty$
$1-e+e^x(1+e)$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{1-e+e^x(1+e)}{1-e^x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\mathscr{S} = \left[\ln\left(\dfrac{e-1}{e+1}\right);0\right[$

Exercice 7 : Déterminer les limites

$\lim\limits_{x\to 0^+} x-\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}-1+\ln x$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x-\ln x = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}-1+\ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} 1+x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\sqrt{1+x^2} = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} 1+x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} 1+\sqrt{1+x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{1+x^2} = 1+\sqrt{1+O^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{1+x^2} = 2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x-\ln x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\ln x = -\ln x \\ \text{Forme Indéterminée} \end{cases}$

$x-\ln x = x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x-\ln x = +\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \times \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0\times 0 = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2} = +\infty$

$x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2} = x+\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$

Exercice 8 : Pour chacunes des fonctions, indiquer sur quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et calculer sa dérivée.

$f(x) = \ln(3x-1)$; $g(x) = 2\ln x$; $h(x) = \ln(x^2)$

Dérivable sur $]\frac{1}{3};+\infty[$; Dérivable sur $]0;+\infty[$; Dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$f'(x))\dfrac{3}{3x-1}$; $g'(x) = \dfrac{2}{x}$; $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

$f_1(x) = 2x+1+\ln x$; $g_1(x) = \ln(1+x^2)$; $h_1(x) = \ln(2x-x^2)$

Dérivable sur $]0;+\infty[$; Dérivable sur $\mathbb{R}$; Dérivable sur $]0;2[$

$f_1'(x) = 2+\dfrac{1}{x}$; $g_1'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; $h_1'(x) = \dfrac{2-2x}{(2x-x^2)^2}$

$f_2(x) = x\ln x - x$; $g_2(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$; $h_2(x) = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$

Dérivable sur $]0;+\infty[$; Dérivable sur $]-1;+\infty[$; Dérivable sur $]0;+\infty[$

$f_2'(x) = \ln x$; $g_2'(x) = \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$; $h_2'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2(\sqrt{x}+x)}$

$f_3(x) = \ln\left(e^x+1\right)$; $g_3(x) = x^2+(\ln x)^2$; $h_3(x) = e^x\ln x$

Dérivable sur $\mathbb{R}$; Dérivable sur $]0;+\infty[$; Dérivable sur $]0;+\infty[$

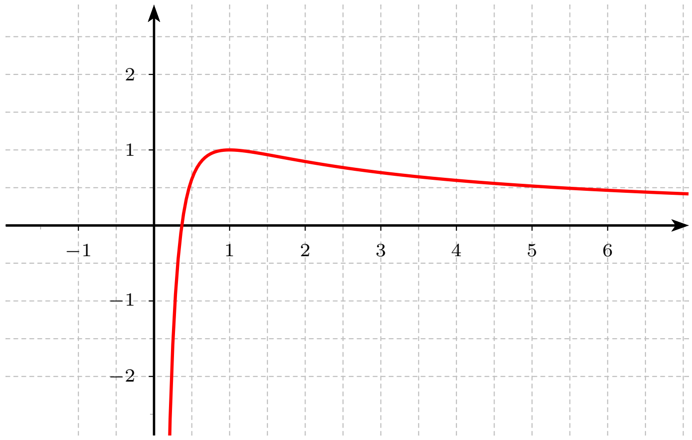
$f_3'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$; $g_3'(x) = 2x+2(\ln x)\times\dfrac{1}{x}$; $h_3'(x) = e^x\ln x + e^x\times\dfrac{1}{x}$

Exercice 9 : Faire l'étude des variations et représenter graphiquement, la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{1-1-\ln x}{x^2}$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$,

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x=-\infty\end{cases}$, Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$, Alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

Et la représentation graphique



On obtient le tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$f(1)$	↘	0

où $f(1)=\dfrac{1+\ln 1}{1}=1$

Exercice 10 : On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$

1. Montrer que g est définie pour tout x de $]-2;2[$, et déterminer les limites de g en -2 et 2.

   g est définie pour tout x tel que $\dfrac{2+x}{2-x} > 0$,

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

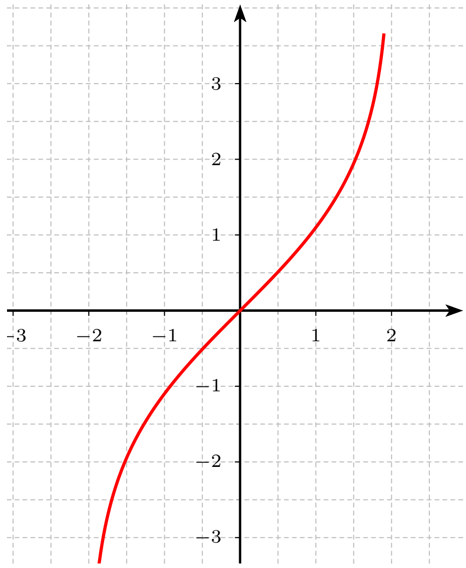
   donc sur $]-2;2[$

   $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2+x}{2-x} = 0^+$, Alors $\lim\limits_{x\to-2} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2+x}{2-x} = +\infty$, Alors $\lim\limits_{x\to2} g(x) = +\infty$

2. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g.

   $$g'(x) = \dfrac{\dfrac{1\times(2-x)-(2+x)\times(-1)}{(2-x)^2}}{\dfrac{2+x}{2-x}} = \dfrac{4}{(2-x)^2}\times\dfrac{2-x}{2+x} = \dfrac{4}{(2-x)(2+x)},$$

   Et la représentation graphique,



   On obtient alors le tableau de variation de g,

x	-2		2
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
g	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

3. Tracer $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 1cm.

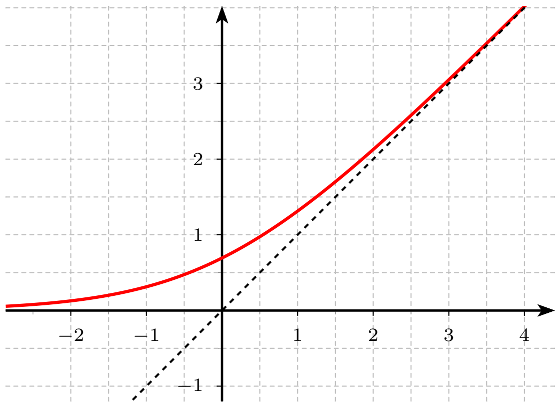
4. Justifier que pour tout x de $]-2;2[$, $g(-x) = -g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_g$?

   pour tout x de $]-2;2[$, $g(-x) = \ln\left(\dfrac{2+(-x)}{2-(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{-1} = -\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = -g(x)$,

   Alors $\mathscr{C}_g$ admet l'origine pour centre de symétrie.

Exercice 11 : On considère la fonction h définie par $h(x) = \ln(1 + e^x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de h. Étudier les variations de h. Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentant h.
   Pour tout réel x, $e^x > 0$, Alors h définie sur $\mathbb{R}$.
   $h'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$ pour tout réel x, h strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\ln 1 = 0$, Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ ET $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
   On onbtient



2. Tracer sur le même graphique la droite d d'équation $y = x$.
3. Justifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$.
   Pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln e^x = h(x) - x$
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - x = 0$. Interpréter graphiquement cette limite.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, et $\ln 1 = 0$, Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.
   La courbe qui représente h, admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote oblique.

Exercice 12 : On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Soit g la fonction définie sur $[1+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$
   Montrer que g est positive sur $[1+\infty[$.
   Pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$, g strictement croissante sur $[1+\infty[$.
   De plus $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$, Alors g est positive sur $[1+\infty[$.

2. (a) Montrer que pour tout x de $[1+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   (b) En déduire le sens de variations de f sur $[1+\infty[$
   Sur $[1+\infty[$, $x^2 > 0$, Alors f' est du signe de g soit f' positive, f strictement croissante sur$[1+\infty[$.
   (c) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d d'équation $y = x$
   Sur $[1+\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln x}{x} < 0$, la courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite d'équation $y = x$

3. Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et d.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $k \geq 2$, la distance M_kN_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln k}{k}$. Justifier que cette distance tend vers 0, lorsque k tend vers $+\infty$
   Par définition des points M_k et N_K la distance $M_KN_K = k - f(k) = \dfrac{\ln k}{k}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, Alors $\lim\limits_{k\to+\infty} = 0$
   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}

Variables	k entier
Initialisation	k prend la valeur 2
Traitement	TANT QUE $\dfrac{\ln k}{k} > 10^{-2}$
	Faire k prend la valeur $k+1$
	FIN TANT QUE
Sortie	Afficher k