Exercice 1 : (2 points)

1. Résoudre $x^2+x>0$ $x^2+x=x(x+1)$ positif à l'extérieure des racines, $\mathscr{S}=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
2. Résoudre $\ln\left(x^2+x\right)=\ln 2 \Leftrightarrow x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$, $\Delta=1-4\times 1\times(-2)=9>0$
   Deux racines réelles, $x_1=\dfrac{-1-3}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{-1+3}{2}=1$.
   Ces deux racines sont dans $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ donc solutions de $\ln\left(x^2+x\right)=\ln 2$

Exercice 2 : (8 points)

La glycémie est le taux de glucose dans le sang. On observe la glycémie chez un individu après ingestion d'une boisson sucrée. On considère que la glycémie (en g/l) en fonction du temps écoulé (en heures) est donnée par la formule

$$g(t)=\ln(3t+1)-t+1, \text{ avec } t\in[0;3]$$

1. Calculer le taux de glucose dans le sang de cet individu, quinze minutes après l'ingestion.
   quinze minutes soit $\dfrac{1}{4}=0,25$ heures, $g(0,25)=\ln(1,75)+0,75\approx 1,3$ heures ≈ 78 minutes
2. Calculer $g'(t)$. $g'(t)=\dfrac{3}{3t+1}-1=\dfrac{-3t+2}{3t+1}$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

x	0		$\frac{2}{3}$		3
$-3t+2$		$+$	0	$-$	
$3t+1$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$g(0)$	$\nearrow$	$g(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\ln 10-2$

   où $g(0)=\ln 1+1=1$, $g(\frac{2}{3})=\ln(2+1)-\dfrac{2}{3}+1=\ln 3+\dfrac{1}{3}\approx 1,43$ et $\ln 10-2\approx 0,3$
4. À quel instant la glycémie est-elle maximale ? Que vaut alors cette glycémie ?
   g est maximum pour $\dfrac{2}{3}$ heures, soit 40 minutes, et vaut $g(\frac{2}{3})\approx 1,43$
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer à quel instant la glycémie repasse à 1 g/l.
   $g(1,9)>1$ et $g(1,91)<1$, valeur approchée cherchée $\approx 1,9$ heures, Soit une heure 54 minutes

Exercice 3 : (10 points)

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.
   $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$, Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale.
   $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} 1+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$, Alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$
   (b) Dresser le tableau de variations de f. $f'(x)$ du signe de $-\ln x$, on obtient

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

, où $f(1) = \dfrac{1+\ln 1}{1} = 1$

3. Résoudre $f(x) = 0$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 = \ln e^{-1}$, $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{e};0\right)$.
   On cherche une équation du type $y = f'\left(\dfrac{1}{e}\right)\left(x-\dfrac{1}{e}\right) + f\left(\dfrac{1}{e}\right)$,
   où $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{-\ln e^{-1}}{(e^{-1})^2} = e^2$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1+\ln e^{-1}}{e^{-1}} = 0$,
   Alors T a pour équation $y = e^2\left(x - e^{-1}\right)$, soit $y = e^2x - e$
5. Construire $\mathscr{C}$ et T.